

Spectral-Graph-Theory

Recitation 05.

C עצה:

מבטל $A \in M_{n \times n}$ מרחיבה סכימתה $B \in M_{k \times k}$ חינוך
של A (כלומר B מתקבלת "הסרה שורה וצמודים $n-k$ " (פחמים).

$$\lambda_{\min}(A) \leq \lambda_{\min}(B) \leq \lambda_{\max}(B) \leq \lambda_{\max}(A). \quad \text{P. 17, N. 15c}$$

הכתיבה: יונים א- (T) והסאר באופן סדרה.

$$\lambda_{\min}(A) \leq \lambda_{\min}(B) \quad \leftarrow \quad \text{Interfacing them via poly}$$

$$\lambda_{\min}(B) = \min_{\|v\|=1} v^T B v$$

$\lambda_{\min}(D) = \min_{\|v\|=1} |v| \cdot |v|$
 אלא נקבע $v = \vec{0}$ - כלומר
 נרצה אלא v דהנה זקוקו באורך
 במאניפוקטים על השורה סתמי.

$$\lambda_{\min}(A) \leq v^t A v = v^t B v = \lambda_{\min}(B)$$

תורת הריבוי יחס G איז $\mu_1 \geq \dots \geq \mu_n$ על C_n הרצף.

$$(\mu_n \leq 0) \quad \chi(G) \geq \frac{\mu_1 - \mu_n}{-\mu_n} = \underline{1 + \frac{\mu_1}{-\mu_n}} \quad p'' \neq N \quad \text{'s/c}$$

אם קיבלנו שיש $\chi(G) = k$ אז יש גם k צבעים: הוכחה:

$G|_{V_i} = I_{\sum}$ independent set
 $V = \bigcup V_i$ (312312 120 123 212) 212 512

$$M_Q = \begin{pmatrix} \sqrt{M_{11}} & M_{12} & M_{1k} \\ & \ddots & \\ M_{1k} & & \sqrt{M_{kk}} \end{pmatrix}$$

$$V_j \cap V_i \quad \text{מחלקת} = M_{ij}$$

$$\underline{(k-1)\mu_n + \mu_1 \leq 0} \quad : \text{if } C_1$$

$$\chi(G) = K \geq \frac{M_n - M_1}{M_n} = 1 + \frac{M_1}{-M_n} \Leftrightarrow K \cdot M_n \leq M_n - M_1 \quad : \text{ያልናል ስለሆነ}$$

$$\alpha(G) \leq n \left(1 - \frac{d_{avg}}{\lambda_n} \right)$$

G is bipartite $\Rightarrow$ $\lambda_1 = d$

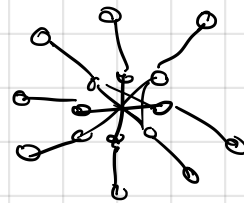
$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)}$$

$$\chi(G) \geq \frac{n}{\alpha(G)} \geq \frac{1}{\left(1 - \frac{d_{avg}}{\lambda_n} \right)} = \frac{\lambda_n}{\lambda_n - d_{avg}} \Leftarrow$$

$d_{avg} = d$, $\lambda_n = d - \mu_n$ since in bipartite G $\mu_1 = d$

$$\frac{d - \mu_n}{- \mu_n} = \frac{\mu_1 - \mu_n}{\mu_n}$$

($\mu_1 = d$)



is $A = \begin{pmatrix} \mu_n & (M_{ij}) \\ (M_{ij})^T & \mu_k \end{pmatrix}$ is

$$(k-1) \lambda_{\min} A + \lambda_{\max} A \leq \sum \lambda_{\max}(M_{ii})$$

$k=2$ is called $k=1$ is called k is called trivial

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ C^T & D \end{pmatrix} \quad \text{is}$$

$$\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(A) \leq \lambda_{\max}(B) + \lambda_{\max}(D)$$

$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ A is $\lambda_{\max}(A)$ $\Rightarrow$ v is $\vec{v}_1$ or $\vec{v}_2$

v' is $v' = \begin{pmatrix} \frac{\|v_1\|}{\|v\|} v_1 \\ -\frac{\|v_2\|}{\|v\|} v_2 \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ $\vec{0} \neq \vec{v}_1, \vec{v}_2$ is

$$\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(A) \leq \frac{v^t A v}{v^t v} + \frac{v^t A v}{v^t v} \leq$$

$$\begin{pmatrix} u_1^t & u_2^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} B & C \\ C^t & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{u_1^t B u_1} + \underline{u_1^t C u_2} + \underline{u_2^t C^t u_1} + \underline{u_2^t D u_2}$$

$$\leq \frac{v_1^t B v_1}{v_1^t v_1} + \frac{v_1^t C^t v_1}{v_1^t v_1} + \frac{v_1^t C v_2}{v_1^t v_1} + \frac{v_2^t D v_2}{v_2^t v_2}$$

$$v_2^t C^t v_1 = - \frac{\|v_1\|}{\|v_2\|} v_2^t \cdot C^t \cdot \frac{\|v_2\|}{\|v_1\|} v_1$$

$$= - \frac{\|v_1\| \|v_2\|}{\|v_1\| \|v_2\|} = - v_2^t C^t v_1$$

$$\left(v_1' = \frac{\|v_2\|}{\|v_1\|} v_1 \right)$$

$$\Rightarrow v_1^t B v_1 + v_1^t B v_1 + v_2^t D v_2 + v_2^t D v_2$$

$$\frac{\left(\frac{\|v_2\|^2}{\|v_1\|^2} + 1 \right)}{\frac{1}{\|v_1\|^2}} v_1^t B v_1 + \frac{\left(\frac{\|v_2\|^2}{\|v_2\|^2} + 1 \right)}{\frac{1}{\|v_2\|^2}} v_2^t D v_2$$

$$\frac{v_1^t B v_1}{v_1^t v_1} + \frac{v_2^t D v_2}{v_2^t v_2} \leq \lambda_{\max}(B) + \lambda_{\max}(D)$$

||| כיוון K כיוון K+1 כיוון

$$A = \begin{pmatrix} B & \\ & M_{k+1, k+1} \end{pmatrix}$$

||| כיוון K=2 כיוון N

$$\lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(A) \leq \lambda_{\max}(B) + \lambda_{\max}(M_{k+1, k+1})$$

$$(K-1) \lambda_{\min}(B) + \lambda_{\max}(B) \leq \sum_{i=1}^K \lambda_{\max}(M_{ii}) \Rightarrow \lambda_{\max}(B) \leq -(K-1) \lambda_{\min}(B) + \sum_{i=1}^K \lambda_{\max}(M_{ii})$$

הקצרה

שדה

$$\textcircled{\leq} \lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(A) + (k-1) \lambda_{\min}(B) \leq \sum_{i=1}^{k+1} \lambda_{\max}(H_{ii})$$

$$\lambda_{\min}(B) \geq \lambda_{\min}(A)$$

$$\textcircled{\geq} (k-1) \lambda_{\min}(A) + \lambda_{\min}(A) + \lambda_{\max}(A).$$

נרדף $\lambda_{\min}(A)$ $\lambda_{\max}(A)$ $\lambda_{\min}(B)$
