

# Spectral-Graph-Theory

## Recitation 07.

חובה מלכתחילה ששומרי: סופר בדיקור 06.

שאלה: הפיתוח מלווה סימולציה,  $\overbrace{M}^{(PSD)}$  ניצב ניהול ממוקד

א' א' נח מרדכי הנרייב ?

פונקציה  $P_{\min}(M)$  של  $M$  ושל  $\delta$ .

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \quad \left[ \underbrace{M - \lambda' I = C}_{\text{rank}(C) = n} \right] \quad \text{rank}(C) = n \quad \text{rank}(C) = n$$
$$(M(f|S_0, \dots, S_N) | v_i) \quad X = \sum a_i v_i \quad \text{'77N} \quad \text{'1Cp} \quad f \quad f_{210} .$$
$$M^k_x = \sum a_i \lambda_i^k r_i \quad \text{sic} \quad a_i \neq 0! \quad \text{Junk!} \quad \text{Isabel} \quad \text{אני}$$

נתון:  $x \in \mathbb{R}^n$  ו- $y \in \mathbb{R}^m$  ו- $M \in \mathbb{R}^{m \times n}$  ו- $\epsilon > 0$ .  
 המטרה: למצוא  $\tilde{x} \in \mathbb{R}^n$  כך ש- $\|M\tilde{x} - y\|_2 \leq \epsilon$ .  
 הפתרון:  $\tilde{x} = M^+ y$  (הפתרון המינימלי).  
 הסיבה:  $M^+ = (M^T M + \epsilon^2 I)^{-1} M^T$  (הפתרון המינימלי).  
 הסיבה:  $M^+ = (M^T M + \epsilon^2 I)^{-1} M^T$  (הפתרון המינימלי).

• מה ההסתברות דהיכלתה (נפועציה של  $\binom{n, \epsilon}{k}$ ) הן  $\text{supp}$  של ההסתברות.

$(O(K(V+E)) \rightarrow O(K(n+m)))$  - ? (K לע חישוב)  $\rightarrow$  סיף + n.

מה? מה? "קבלה" ואיך? צד?

$$\lambda_1 \geq \frac{y^t M y}{y^t y} \geq (1 - o(\varepsilon)) \lambda_1$$

הנני מניח כי  $x$  הוא וקטור

על  $\mathbb{R}^n$

בהסתמך על הנימוק הנ"ל, נקבל כי  $\frac{3}{16} \leq \lambda_1$

$$\frac{x_k^T M x_k}{\|x_k\|^2} \geq \lambda_1 (1-\varepsilon) \cdot \frac{1}{1+4n(1-\varepsilon)^{2k}} \quad \text{המקרה}$$

1. חלק 1

נניח כי  $x \sim \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \epsilon_i e_i$  ו-  $v \in \mathbb{R}^n$  וקטור יחידה

$$P[|\langle v, x \rangle| \geq \frac{1}{2}] \geq \frac{3}{16} \quad \text{לפי משפט}$$

2. חלק 2

נניח כי  $x \in \mathbb{R}^n$  ו-  $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ ,  $k \in \mathbb{N}$  ו-  $y = M^k x$

$$\frac{y^T M y}{y^T y} \geq \lambda_1 (1-\varepsilon) \cdot \left( 1 + \frac{\|x\|^2}{\langle x, v_1 \rangle^2} (1-\varepsilon)^{2k} \right)^{-1}$$

נניח כי  $\lambda_1$  הוא הערך העigen של  $M$  (הערך העigen הגדול ביותר)

$$\frac{y^T M y}{y^T y} \geq \lambda_1 (1-\varepsilon) \left( 1 + \frac{\|x\|^2}{\langle x, v_1 \rangle^2} (1-\varepsilon)^{2k} \right)^{-1}$$

$$= \lambda_1 (1-\varepsilon) \left( 1 + \frac{n}{\langle x, v_1 \rangle^2} (1-\varepsilon)^{2k} \right)^{-1} \geq$$

$$\lambda_1 (1-\varepsilon) \left( 1 + \frac{n}{1} (1-\varepsilon)^{2k} \right)^{-1} = \lambda_1 (1-\varepsilon) \left( \frac{1}{1+4n(1-\varepsilon)^{2k}} \right)$$

$$\lambda_1 (1-\varepsilon) \left( \frac{1}{1+4n(1-\varepsilon)^{2k}} \right) \geq \lambda_1 (1-O(\varepsilon)) \quad \text{על } \mathbb{R}^n \quad \square$$

• שבת פ"ח  $k = O(\frac{\log n}{\epsilon})$  פ"ח פ"ח

1.  $x \sim \pm 1^n$  (כ"כ)  $v \in \mathbb{R}^n$  (כ"כ)  
 $P[|<v, x>| \geq \frac{1}{2}] \geq \frac{3}{16}$  : פ"ח פ"ח

הנחה:  $S = \sum x_i v_i = \langle \bar{x}, \bar{v} \rangle$   
 $E(S) = 0$

כ"כ  $E(x_i) = 0$

$$S^2 = \sum_i v_i^2 + \sum_{i \neq j} v_i v_j x_i x_j$$

$$E(S^2) = 1$$

$$E(S^4) = E(S^2)^2 = E\left(\sum_i v_i^2 + \sum_{i \neq j} v_i v_j x_i x_j\right)^2$$

$$E\left(\left(\sum_i v_i^2\right)^2 + 2 \sum_{i \neq j} v_i^2 v_j^2\right)$$

$$\left(\sum_i v_i^2\right)^2 = \sum_i v_i^4 + \sum_{i \neq j} v_i^2 v_j^2$$

$$\sum_{i \neq j} v_i^2 v_j^2 = \left(\sum_i v_i^2\right)^2 - \sum_i v_i^4$$

$$\Rightarrow E\left(3 \sum_{i \neq j} v_i^2 v_j^2 - 2 \sum_i v_i^4\right) \leq 3$$

$S$  $\hat{N}$ 

פב'0

$$E(S) = 0$$

$$E(S^2) = 1$$

$$E(S^4) \leq 3$$

$$P(|S| \geq \frac{1}{2}) = ?$$

: פדיון פב'0

$$P(Z \geq \delta E(Z)) \geq (1-\delta)^2 \frac{(E Z)^2}{E(Z^2)} : \text{מרסו} \quad \text{ב'0}$$

$$\delta = \frac{1}{4}, \quad Z = S^2 \text{ פב'0}$$

$$P(\langle x, v \rangle^2 \geq \frac{1}{4}) \geq (1 - \frac{1}{4})^2 \frac{1}{E(S^4)} \geq \frac{3}{16}.$$

$\frac{9}{16} \cdot \frac{1}{3}$

$$P(|\langle x, v \rangle| \geq \frac{1}{2}) \geq \frac{3}{16}.$$

$$0 \neq \langle x, v_1 \rangle \leftarrow 2\alpha\beta C$$

$$y = M^k x \text{ for } p \text{ and } p' \text{ and } 0 < \varepsilon \in \mathbb{R}, k \in \mathbb{N} \text{ and } \lambda_1 > 0, x \in \mathbb{R}^n \text{ s.t.}$$

$$\frac{y^t M y}{y^t y} \geq \lambda_1 (1 - \varepsilon) \cdot \left( 1 + \frac{\|x\|^2}{\langle x, v_1 \rangle^2} (1 - \varepsilon)^{2k} \right)^{-1}$$

$$x = \sum a_i v_i$$

מוסר : הוכחה

$$y = \sum a_i \lambda_i^k v_i$$

$$y^t y = \sum_i a_i^2 \lambda_i^{2k}$$

$$y^t M y = \sum a_i^2 \lambda_i^{2k+1} \quad (\geq)$$

הוכחה : הוכחה

$$\lambda_i \geq (1 - \varepsilon) \lambda_1$$

לכן  $\lambda_i \geq (1 - \varepsilon) \lambda_1$

$$(\geq) \lambda_1 (1 - \varepsilon) \sum_1^l a_i^2 \lambda_i^{2k}$$

$$y^t y = \sum a_i^2 \lambda_i^{2k} = \sum_1^l a_i^2 \lambda_i^{2k} + \sum_{l+1}^n a_i^2 \lambda_i^{2k} \text{ , עבור }$$

$$\sum_{l+1}^n a_i^2 \lambda_i^{2k} \leq \lambda_1^{2k} (1 - \varepsilon)^{2k} \sum_{l+1}^n a_i^2$$

$$\leq \lambda_1^{2k} (1 - \varepsilon)^{2k} \cdot \|x\|^2 \cdot \frac{a_1^2}{a_1^2} = \frac{\|x\|^2}{a_1^2} \lambda_1^{2k} (1 - \varepsilon)^{2k} a_1^2$$

$$\frac{\|x\|^2}{a_1^2} \left( \sum_1^l \lambda_i^{2k} a_i^2 \right) (1 - \varepsilon)^{2k}$$

$$\frac{y^t M y}{y^t y} \geq \frac{\lambda_1 (1 - \varepsilon) \sum_1^l a_i^2 \lambda_i^{2k}}{\sum_1^l a_i^2 \lambda_i^{2k} + \left( \frac{\|x\|^2}{a_1^2} (1 - \varepsilon)^{2k} \right) \sum_{l+1}^n a_i^2 \lambda_i^{2k}} = \frac{\lambda_1 (1 - \varepsilon)}{\left( 1 + \frac{\|x\|^2}{a_1^2} (1 - \varepsilon)^{2k} \right)}$$

הוכחה.