Spectral-Graph-Theory
Recitation 04.

תזכורת

בשבוע שעבר דיברנו על גרפי קיילי $G(\Gamma,S)$. והתחלנו לנתח את הלפלסיאן של גרפי פיילי ($\Gamma=\mathbb{Z}_p$, S: קב' השאריות הריבועיות). דיברנו על כרקטרים: $\chi: G\to\mathbb{C}^*$.

סימונים: • L - הלפלסיאן של גרף פיילי.

• I - מטריצת יחידה, $J=\begin{pmatrix}1&\cdots&1\\ 1&\cdots&1\end{pmatrix}=\mathbb{1}\mathbb{1}^t$.

• X המטריצה המושרית של הכרקטר הכפלי: $X_{ij}=\chi(i-j)$. $\chi(a)=\begin{cases}1 & a\in S\\ -1 & a\notin S\\ 0 & a=0\end{cases}$.

ראינו כי אז מתקיים:

1) $X^2=pI-J$

2) $X=pI-2L-J$

אז מקבלים: 3) $L^2=pL+\frac{(p-1)}{4}J-\frac{p(p-1)}{4}I$.

הוכחה שוויון:

(1 + (2 $\Rightarrow$ (3

$$pI-J\overset{1)}{=}X^2=(pI-2L-J)^2=$$
$$=p^2I-2pL-pJ-2pL+4L^2+\underbrace{2LJ}_{=0}-pJ+\underbrace{2JL}_{=0}+J^2$$

$(J^2=pJ)$

$$=p^2I-4pL+4L^2-pJ$$

מעבירים אגפים ומחלקים ב 4, מקבלים את שוויון 3.

$$X = pI - 2L - J \qquad (2$$

$$X_{ii} = 0 \qquad pI_{ii} = p \qquad L_{ii} = \frac{p-1}{2} \qquad J_{ii} = \underline{1}$$

$$p - 2\frac{p-1}{2} - 1 = 0.$$

$i \neq j$. $\quad i - j \in S$:

$$X_{ij} = \underline{1} \qquad I_{ij} = 0, \quad L_{ij} = -1 \qquad J_{ij} = \underline{1}$$

$$0 + 2 - 1 = \underline{1}$$

$i - j \notin S$

$$X_{ij} = -1 \qquad I_{ij} = 0 \qquad L_{ij} = 0 \qquad J_{ij} = \underline{1}$$

$$0 - 2 \cdot 0 - 1 = \underline{-1}.$$

$$\left(\langle x_i, x_j \rangle \right)_{ij} = X^t X = X^2 = pI - J. \qquad (1$$

$$X^2_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle = \sum_{t \in \mathbb{Z}_p} \chi(i-t)\chi(j-t)$$

$y = i - t$

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}_p} \chi(y)\chi(y - (i-j))$$

נחלק:

$i = j$:

$$\forall y \; \overline{\chi(y)} = \chi(y) \qquad \sum_{y \in \mathbb{Z}_p} \chi(y)\chi(y) = \sum_{y \in \mathbb{Z}_p^*} \overline{\chi(y)}\chi(y)$$

$$= p - 1$$

ואם $w := i - j \in \mathbb{Z}_p^*$ $i \neq j$

$$\sum \overline{\chi(y)}\chi(y - w) = -1$$

$$X^2 = pI - J.$$

עוד קצת על כרקטרים:

יהיו $G_1,\dots,G_k$ חבורות ~~אבליות~~ סופיות אבליות איך נראים הכרקטרים של $G = G_1\times\dots\times G_k$

טענה: כל כרקטר $\chi: G\to\mathbb{C}^*$ ניתן להצגה כ- $\chi_1\cdot\ldots\cdot\chi_k$ כאשר $\chi_i: G_i\to\mathbb{C}^*$ כרקטר.

הוכחה: $g=(g_1,\dots,g_k)$, $g_i\in G_i$, $g'=(g'_1,\dots,g'_k)$

$$g\cdot g' = (g_1 g'_1,\dots,g_k g'_k)$$

יהא $\chi: G\to\mathbb{C}^*$ כרקטר. $\chi|_{G_i}: G_i\to\mathbb{C}^*$, $\chi|_{G_i}(g)=\chi(id,\dots,\overset{i}{g},id)$ קל לראות ש $\chi|_{G_i}=\chi_i$ כרקטר

נקבל $\chi(\vec g)=\prod \chi_i(g_i)$. מתקיים $(g_1,\dots,g_k)=(g_1,id,\dots,id)\cdot(id,g_2,\dots,id)\cdots(id,\dots,g_k)$ מתכונות ההומומורפיזם.

מסקנה: $\forall i: G_i=\mathbb{Z}_n$. ראינו בשבוע שעבר שניתן להציג כל כרקטר כ- $\chi(i)=\xi^i$ עבור ξ שורש יחידה מסדר n.

באופן שקול, נסמן ב φ_n שורש יחידה פרימיטיבי מסדר n (לדוגמא $e^{2\pi i/n}$) ונקבל $\xi=\varphi_n^{\frac{n}{m}}=\varphi_n^{c}$ ⇐ $\chi(i)=\varphi_n^{c\cdot i}$.

לכן כרקטר של $\mathbb{Z}_n^k$ הוא פשוט מהצורה: $\chi(g_1,\dots,g_k)=\varphi_n^{c_1 g_1}\cdots\varphi_n^{c_k g_k}$

כלומר לכל $\vec c\in\mathbb{Z}_n^k$ קיים $\chi_{\vec c}:\mathbb{Z}_n^k\to\mathbb{C}^*$, $\chi_{\vec c}(\vec g)=\varphi_n^{\langle\vec c,\vec g\rangle}$.

$\chi:\mathbb{Z}_n^k\to\mathbb{C}^*$ מהטענה $\chi=\chi_1\cdot\ldots\cdot\chi_k$

כאשר $\chi_i:\mathbb{Z}_n\to\mathbb{C}^*$ כלומר $\chi_i(g)=\varphi_n^{c_i(g)}$ ולכן

$$\chi(\vec g)=\varphi_n^{\langle\vec c,\vec g\rangle}=\varphi_n^{\sum c_i g_i}.$$

נסמן $\chi: \chi_{\vec c}$

קבוצה מוכללת: היא גרף קיילי עם $\Gamma = \mathbb{Z}_2^n$,

$S = \{g_1, \dots, g_k\}$ קבוצת אומרים כללית (מדוע סגורה להופכי?).

הקבוצה "הרגילה" היא כאשר $S = \{e_1, \dots, e_n\}$

$$e_i = (0, \dots, \underset{i}{1}, \dots, 0)$$

טענה: יהא $G(\Gamma, S)$ גרף קבוצה מוכללת, אז הע"ע של L_G הם: $v_{x_{\vec{c}}}(g) = x_{\vec{c}}(g)$ $\forall \vec{c}$

עם ע"ע: $|S| - \sum_{g \in S} x_{\vec{c}}(g)$: $\forall \vec{c}$

קבוצה מוכללת - יוצרים רנדומיים:

משפט: יהא $k=c\cdot n$. יהא $G(\Gamma,S)$ גרף קיילי מוכלל, $|S|=k$,
אז בהסתברות גבוהה (רחוקה מ-0) על פני בחירת היוצרים
S, מתקיים שהערך של λ_G שונים 0 נמצאים כולם
באינטרבל: $\left[k-k\sqrt{\frac{2}{c}},\ k+k\sqrt{\frac{2}{c}}\right]$

דוגמה: עבור $S=\{e_1,\dots,e_n\}$ קיבלנו ערך $\{0,2,\dots,2n\}$
$k=n=1\cdot n$.

הוכחה: 1) יהי $0\neq\vec{c}\in\{0,1\}^n$ אז $\Pr_{\vec{g}\in\mathbb{Z}_2^n}[\langle\vec{c},\vec{g}\rangle=0]=\frac{1}{2}$

מכאן $(*)=\Pr_{\vec{g}}[\chi_{\vec{c}}(g)=1]=\frac{1}{2}$

כלומר אם נבחר מ"מ $\chi_{\vec{c}}$ שמקבל 1 בהסתברות $(*)$
אז $\chi_{\vec{c}}$ משתנה מקרי אחיד על $\{\pm1\}$.

צ"ל: צ'רנוף: יהיו X_i, $1\le i\le k$ מ"מ מוגדרים אחיד על ±1 אז:
$$\Pr\left[\left|\sum^{k} X_i\right|\ge t\right]\le 2e^{-t^2/2k}$$

נסמן $\lambda_{\vec{c}}=k-\sum_{g\in S}\chi_{\vec{c}}(g)$.

$$\Pr\left(|k-\lambda_{\vec{c}}|\ge k\sqrt{\tfrac{2}{c}}\right)=\Pr\left[\left|\sum\chi_{\vec{c}}(g)\right|\ge k\sqrt{\tfrac{2}{c}}\right]$$
$$=\Pr\left[\left|\sum X_i\right|\ge k\sqrt{\tfrac{2}{c}}\right]\le 2e^{-\frac{(k\sqrt{2/c})^2}{2k}}=2e^{-\frac{k}{c}}=2e^{-n}$$

$$\Pr[\exists\vec{c}\ \lambda_{\vec{c}}\text{ is bad}]\le\sum_{\vec{0}\neq\vec{c}}\Pr[\lambda_{\vec{c}}\text{ is bad}]$$
יוניון באונד
$$\le(2^n-1)\cdot 2e^{-n}<<1.$$